

תיאוריית הקוונטים ב מספר הקורס 141421

פרק 4 - תרגילים ברמת מבחן

תוכן העניינים

1. שאלות חזרה קצרות בנושאים ספציפיים.....1
2. תרגילים בתורת הקוונטים.....3

שאלות חזרה קצרות בנושאים ספציפיים

שאלות

- (1) **המודל הקוונטי לאטום המימן 1**
האם לפי המודל הקוונטי לאטום המימן מרחק האלקטרון מהגרעין במצב הייסוד חייב להיות שווה לרדיוס בוהר?
- (2) **המודל הקוונטי לאטום המימן 2**
האם המודל של בוהר נותן את הערך המדויק של התנ"ז באטום המימן?
- (3) **המודל הקוונטי לאטום המימן 3**
גז של אטומי מימן נמצא ברמה $4d$ ($n=4, l=2$). כמה קווי פליטה נוכל לראות מהגז? ספרו את כל קווי הפליטה האפשריים עד שהאטומים מגיעים לרמת הייסוד.
- (4) **המודל הקוונטי לאטום המימן 4**
אטום מימן נמצא במצב $n=3, l=1$. האם הזווית בין התנ"ז של האלקטרון לשדה המגנטי חיצוני יכולה להיות 135 מעלות?
- (5) **המודל הקוונטי לאטום המימן 5**
מערכת מסוימת נמצאת במצב הקוונטי $\psi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{21}}(4Y_4^2 - Y_4^3 + 2Y_3^3)$, כאשר Y_l^m הן הספריות ההרמוניות. מה ההסתברות שבמידת גודלו של התנז יתקבל הערך $\sqrt{20}\hbar$?
- (6) **אפקט זימן 1**
מהו גודלו של השדה המגנטי הקבוע הדרוש על מנת שעבור אטום מימן הרמה $(n=5, l=4, m=3)$ תתלכד עם הרמה $(n=6, l=2, m=-1)$? התעלמו מספין האלקטרון.
- (7) **אפקט זימן 2**
כמה קווים ספקטרליים שונים ניתן לראות בעקבות מעברים באפקט זימן הנורמאלי?

(8) אפקט זימן 3

אטום דמוי מימן מורכב מאלקטרון אחד וגרעין בעל מסה $3m_p$ ומטען $5e$.
 שמים את האטום באזור עם שדה מגנטי חיצוני אחיד שגודלו $2 \cdot 10^4 T$.
 מצאו את אורך הגל הקצר ביותר שיוכל להתקבל מהמעבר של האלקטרון
 מהמצב $2p$ לרמת היסוד.

תשובות סופיות

- (1) לא
- (2) לא
- (3) 5 מעברים.
- (4) הזווית אפשרית.
- (5) $\frac{17}{21}$
- (6) 718 T
- (7) 3 קווים.
- (8) 48.4 אנגסטרומ.

תרגילים בתורת הקוונטים:

שאלות:

(1) בור עם מדרגה באמצע

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת השפעת הפוטנציאל הבא:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ V_0 & L \leq x \leq 2L \\ 0 & 2L \leq x \leq 3L \\ \infty & x > 3L \end{cases}$$

מצב החלקיק ב- $t=0$ הוא:

$$\psi(x, t=0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) & 2L < x < 3L \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. חשבו את ערך התצפית של אופרטור האנרגיה כתלות בזמן $\langle H(t) \rangle$.
- ב. מהו ערך התצפית של אופרטור המקום ברגע $t=0$? האם ערך תצפית זה ישתנה בזמן? הסבירו.
- ג. כתבו את פונקציית הגל ב- $t=0$ כסופרפוזיציה של שני מצבים עצמיים של אופרטור התנע. מהו ערך התצפית של אופרטור התנע ב- $t=0$?
- ד. כעת התייחסו לפוטנציאל V_0 כאל הפרעה קטנה. מהי רמת האנרגיה המעוררת הראשונה במערכת בפיתוח עד לסדר ראשון בתורת ההפרעות? מהו התנאי על הפוטנציאל V_0 כך שניתן להשתמש בתורת ההפרעות?

(2) סופרפוזיציה 3 ו-4 באוסילטור הרמוני

חלקיק נמצא תחת פוטנציאל של אוסילטור הרמוני קוונטי.
מצב החלקיק נתון לפי פונקציית הגל הבאה:

$$\psi(x) = c_1 \phi_3(x) + c_2 \phi_4(x)$$

כאשר c_1 ו- c_2 הם קבועים ממשיים ו- ϕ_3, ϕ_4 הן הפונקציות העצמיות של ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני חד מימדי עבור $n = 3, 4$ בהתאמה.
נתון כי ההסתברות של החלקיק להיות במצב ϕ_4 גדולה פי 2 מההסתברות שלו להיות במצב ϕ_3 .

א. חשבו את המקדמים c_1 ו- c_2 .

ב. מה ערכי האנרגיה האפשריים של החלקיק?

מהו ערך התצפית של האנרגיה?

ג. מהי האנרגיה הפוטנציאלית ומהי האנרגיה הקינטית של החלקיק?

ד. על החלקיק בוצעה מדידה ונמצא כי האנרגיה שלו היא: $\frac{9\hbar\omega}{2}$,

לאחר זמן מה בוצעה מדידה נוספת, מהן התוצאות האפשריות למדידה זו?

הסבירו כיצד התשובה מסתדרת עם עיקרון אי הודאות באנרגיה

$$\text{ובזמן } \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

ה. כעת נתון כי החלקיק נמצא ברמת היסוד ומסיפים להמילטוניאן

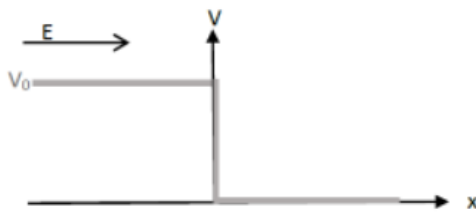
$$H' = A_3 x^3 + A_4 x^4 \quad \text{הפרעה קטנה מהצורה:}$$

חשבו את התיקון הראשון לאנרגיית רמת היסוד של החלקיק.
העזרו ב:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\hat{a}|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle \quad \hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle$$

(3) פיזור ממדרגה הפוכה

אלומת חלקיקים בעל מסה m ואנרגיה E מגיעה משמאל ופוגשת מדרגת פוטנציאל "הפוכה":

$$E > V_0 \quad V = \begin{cases} V_0 > 0 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

- א. רשמו את משוואת שרדינגר בכל המרחב ופתרו אותה.
 ציירו סכמתית את פונקציית הגל בכל המרחב.
 ב. מצאו את מקדם ההחזרה והראו כי ניתן לבטא אותו בעזרת:

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}} \right)^2$$

- ג. נויטרון בעל אנרגיה קינטית 4MeV פוגע בגרעין מסוים.
 נתון כי ההסתברות של הנויטרון להירתע ולא לחדור כלל לתוך הגרעין היא 0.25 .
 בהנחה כי המצב המתואר בסעיפים הקודמים הוא קרוב טוב לבעיה זו, מהי האנרגיה הפוטנציאלית בבעיה?

(4) ניתוח רמה באטום המימן

- פוטון באורך גל של: $6562.79 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ נפלט מאטום מימן.
 א. מצאו מאיזו לאיזו רמה נפלט הפוטון וחשבו את רדיוס מסלול האלקטרון, על פי מודל בוהר, אחרי הפליטה.
 ב. על פי מודל שרדינגר ובהנחה שהתנע הזוויתי המסלולי הוא אפס, רשמו את פונקציית הגל המלאה של האלקטרון אחרי הפליטה. (העזרו בנוסחאות).
 ג. חשבו מהו המרחק המסתבר ביותר שבו ניתן למצא את האלקטרון. יש להגיע למשוואה עם r^3 , אין צורך לפתור אותה.
 ד. חשבו מהו ערך התצפית של מרחק האלקטרון מהגרעין $\langle r \rangle$ ברמה זו?

$$\int_0^\infty x^n e^{\frac{-x}{a}} dx = a^{n+1} \cdot n!$$

- ה. הסבירו את ההבדל בין סעיף ג' ל-ד'.
 ו. כעת נניח שהאטום נמצא תחת שדה חשמלי חלש E_0 בכיוון z , חשבו את התיקון מסדר ראשון לרמת האנרגיה של האלקטרון. ההמילטוניאן של השדה הוא: $H' = eE_0 z$, כאשר e הוא מטען האלקטרון.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\langle H(t) \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2}$, החישוב נותן רק ערך ממוצע של הרבה מדידות של מערכות זהות, יש אינסוף ערכים אפשריים של אנרגיה שניתן לקבל במדידה ספציפית.
 ב. $\langle x(t=0) \rangle = 2L$, ישתנה בזמן כי הוא לא מתחלף עם ההמילטוניאן.

$$\langle p(t=0) \rangle = 0, \quad \psi(x, t=0) = \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{i\pi x}{L}} - e^{-\frac{i\pi x}{L}} \right) \sqrt{\frac{2}{L}} \quad \text{ג.}$$

$$V_0 < \frac{\hbar^2}{mL^2}, \quad E'_2 = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{9mL^2} + \frac{V_0}{3} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right) \quad \text{ד.}$$

$$\langle E \rangle = \frac{25}{6} \hbar \omega, \quad E_4 = \frac{9}{2} \hbar \omega, \quad E_3 = \frac{7}{2} \hbar \omega \quad \text{ב.} \quad c_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad c_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{א.} \quad (2)$$

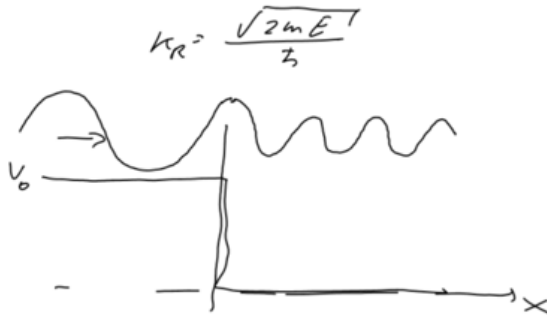
$$\frac{A_4}{4\alpha^4} \quad \text{ה.} \quad E = \frac{9}{2} \hbar \omega \quad \text{ז.} \quad \langle U \rangle = \langle E_k \rangle = \frac{25}{12} \hbar \omega \quad \text{ג.}$$

(3) א.

$$x < 0 \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = E\psi$$

$$\psi_2(x) = Ae^{ik_2 x} + Be^{ik_2 x}$$

$$k_2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar}$$



$$x > 0 \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi$$

$$\psi_R(x) = Ce^{ik_R x}$$

$$k_R = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

ב. הוכחה. ג. $V_0 \approx 32 \text{ MeV}$

$$r = 2.1 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad n=3 \rightarrow n=2 \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}} \left(2 - \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{2a}} \frac{l}{\sqrt{4\pi}} \quad \text{ב.}$$

$$-r^3 + 8r^2a - 16ra^2 + 8a^3 = 0 \quad \text{ג.} \quad 6a \quad \text{ד.}$$

ה. אם נעשה מספר רב של מדידות על מערכות זהות אז הכי הרבה אלקטרונים יצאו לפי התוצאה של הערך המסתבר ביותר. הערך הממוצע של כל המדידות תהיה התוצאה בסעיף ד' והן לא יהיו זהות.

$$E_2^{(1)} = 0 \quad \text{ו.}$$